§ 5. ТЕОРЕМА КАРНО

При абсолютно упругом ударе точки о неподвижную поверхность в отсутствие ударного трения скорость точки может изменяться только по направлению. Числовое значение ее остается неизменным. Кинетическая энергия точки и системы точек, находящихся в таких условиях, не изменяется за время удара. При упругом и абсолютно неупругом ударах кинетическая энергия изменяется.

Установим изменение кинетической энергии в случае абсолютно неупругого удара при мгновенном наложении связей для точки и системы в отсутствие ударного трения. По теореме об изменении количества движения для точки (рис. 156) имеем

$$m\bar{u}-m\bar{v}=\bar{S}, \tag{15}$$

где m — масса точки; $\bar{v}$ и $\bar{u}$ — ее скорости непосредственно до и после удара; $\bar{S}$ — ударный импульс от действия поверхности. При отсутствии ударного трения ударный импульс направлен по нормали к поверхности. Скорость точки после такого удара направлена по касательной к поверхности, т. е. ее проекция на нормаль $u_n=0$. В рассматриваемом случае ударный импульс $\bar{S}$ и скорость точки после удара $\bar{u}$ взаимно перпендикулярны и поэтому удовлетворяют условию

$$\bar{S}\cdot\bar{u}=0.$$

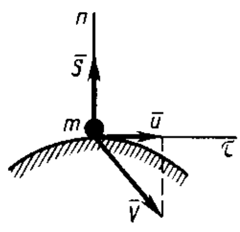

Рис. 156

Учитывая это, умножим обе части (15) скалярно на $\bar{u}$. Получим вспомогательное соотношение

$$-m\bar{v}\cdot\bar{u}+m\bar{u}^2=0. \tag{16}$$

При абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия точки уменьшится на $m\bar{v}^2/2-m\bar{u}^2/2$. Добавляя в это выражение величину, равную нулю в форме (16), получим

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mu^2}{2}=\frac{m\bar{v}^2}{2}-\frac{m\bar{u}^2}{2}+\left(-m\bar{v}\cdot\bar{u}+m\bar{u}^2\right)=$$

$$=\frac{m\bar{v}^2}{2}+\frac{m\bar{u}^2}{2}-m\bar{v}\cdot\bar{u}=\frac{m}{2}\left(\bar{v}-\bar{u}\right)^2.$$

Получена теорема Карно для точки о потере кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе и отсутствии ударного трения:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mu^2}{2}=\frac{m}{2}\left(\bar{v}-\bar{u}\right)^2. \tag{17}$$

Векторную величину $\bar{v}-\bar{u}$ называют *потерянной скоростью*. Теорему Карно для точки можно сформулировать в следующей форме: *потеря кинетической энергии точки при абсолютно неупругом ударе и отсутствии ударного трения в случае мгновенного наложения связей равна кинетической энергии от потерянной скорости.*

Имея (17) для точки, получим теорему Карно для системы в случае абсолютно неупругого удара и отсутствия ударного трения. Необходимо при этом, чтобы связи для точек системы, испытывающих удар, создавали ударные импульсы $\bar{S}_k$, перпендикулярные скоростям точек после удара $\bar{u}_k$, т. е. чтобы для каждой точки выполнялось условие $\bar{S}_k\cdot\bar{u}_k=0$. Тогда для каждой точки справедлива теорема (17)

$$\frac{m_k v_k^2}{2}-\frac{m_k u_k^2}{2}=\frac{m_k}{2}\left(\bar{v}_k-\bar{u}_k\right)^2, \tag{17'}$$

где $\bar{v}_k-\bar{u}_k$ — потерянная скорость k-й точки системы. Суммируя (17′) по всем точкам системы и обозначая кинетическую энергию системы до удара T_0, а после удара — T, получим

$$T_0-T=\frac{1}{2}\sum_k m_k\left(\bar{v}_k-\bar{u}_k\right)^2,$$

$$\text{где}\quad T_0=\sum_k\frac{m_k v_k^2}{2};\qquad T=\sum_k\frac{m_k u_k^2}{2}. \tag{18}$$

Для справедливости теоремы Карно для системы при мгновенном наложении связей вместо условия $\bar{S}_k\cdot\bar{u}_k=0$ для каждой точки достаточно выполнения менее ограничительного условия

$$\sum_k\bar{S}\cdot\bar{u}_k=0.$$

Получена теорема Карно для системы: *потеря кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе в случае мгновенного наложения связей и отсутствия ударного трения равна кинетической энергии от потерянных скоростей точек системы.*

Теорему Карно для точки и системы можно получить также для удара, который возникает при мгновенном снятии связей. При этом кинетическая энергия после удара больше кинетической энергии до удара. Потеря кинетической энергии становится отрицательной. Ударный импульс $\bar{S}_k$ при снятии связи должен быть перпендикулярен скорости точки $\bar{v}_k$ до удара, так как точка двигалась согласно со связью до удара при абсолютно неупругом ударе. Вспомогательное соотношение для точки при снятии связей принимает форму

$$m\bar{u}\cdot\bar{v}-m\bar{v}^2=0, \tag{16'}$$

а теорема Карно в этом случае имеет вид

$$\frac{mu^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}\left(\bar{v}-\bar{u}\right)^2.$$

Для системы она выразится в форме

$$T-T_0=\frac{1}{2}\sum_k m_k\left(\bar{v}_k-\bar{u}_k\right)^2. \tag{18'}$$

При этом для каждой точки системы, испытывающей удар, должно выполняться условие $\bar{S}_k\cdot\bar{v}_k=0$, или $\sum_k\bar{S}_k\cdot\bar{v}_k=0$.